XIII Открытая городская олимпиада по математике.
г. Пермь, 13 марта 2022 года. 6 класс.

1. В Тьмутаракании прошел забег с участием десяти спортсменов. На финише репортер местной газеты спросил у каждого участника, какое место тот занял. Каждый назвал число от 1 до 10, причем все, кроме одного, сказали правду. Сумма их ответов оказалась равна 47. Какое место занял совравший спортсмен, и что именно он сказал? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.

2. В ящике лежат красные, синие, зелѐные и белые шарики. Известно, что красных шариков в три раза больше, чем синих, синих в три раза больше, чем зелѐных, а число белых шариков больше 10. Сколько шариков каждого цвета лежит в ящике, если всего их 40? (В ящике есть шарики каждого цвета.)

3. Саша и Ваня родились 19 марта. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?
4. Найдите наименьшую несократимую положительную дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{11}{333}$ и $\frac{33}{555}$ получаются целые числа.

5. У Вики есть четыре фигурки, у Алины есть квадрат, а у Полины есть квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться так, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (Квадраты складываются без просветов и наложений.)

6. Удав полз по прямой тропинке и около пальмы встретил Попугая, бегущего ему навстречу со скоростью в три раза большей. Кивнув друг другу, они продолжили свое движение дальше по тропинке. Оказавшись около хвоста Удава, Попугай спохватился, что забыл передать ему привет от Мартышки! Он повернул назад и, двигаясь с той же скоростью, вернулся к пальме, но на этот момент на уровне пальмы находилась середина Удава. Решив быстрее догнать Удава, Попугай увеличил скорость в два раза. Определите, сколько шагов прошел Попугай от момента первой встречи и до возвращения к голове, если известно, что длина Удава 300 см, а один шаг Попугая равен 0,9 см. (длина шага Попугая не зависит от скорости с которой он идет).

7. На лицевой стороне каждой из 6 карточек Аня написала черным или красным фломастером по натуральному числу. При этом каждым цветом Аня написала хотя бы два числа. Затем Боря взял каждую карточку, посмотрел, каким цветом на ней написано число, перемножил все Анины числа того же цвета на других карточках и записал результат на обороте карточки (если другая карточка того же цвета всего одна, то Боря пишет число с этой одной карточки). Мы видим обороты, на которых написаны числа 18, 23, 42, 42, 47, 63. А что написано на лицевых сторонах этих карточек?

XIII Открытая городская олимпиада по математике.
г. Пермь, 13 марта 2022 года. 6 класс.
Решения.

1. В Тьмутаракании прошел забег с участием десяти спортсменов. На финише репортер местной газеты спросил у каждого участника, какое место тот занял. Каждый назвал число от 1 до 10, причем все, кроме одного, сказали правду. Сумма их ответов оказалась равна 47. Какое место занял совравший спортсмен, и что именно он сказал? Приведите все варианты и объясните, почему других нет.

Ответ: десятое или девятое места.

Решение: Сумма всех мест равна 1+2+…+10=55, что на 8 больше суммы ответов всех спортсменов. Все кроме одного участника, сказали правду, следовательно, его место на восемь больше, чем сказанное им число. Если его ответ больше двух, то его место должно быть больше 10, чего не может быть, так мест всего десять. Остаётся два возможных варианта: он сказал, что занял второе место, но на самом деле был десятым, или что он занял первое место, а был девятым.

2. В ящике лежат красные, синие, зелѐные и белые шарики. Известно, что красных шариков в три раза больше, чем синих, синих в три раза больше, чем зелѐных, а число белых шариков больше 10. Сколько шариков каждого цвета лежит в ящике, если всего их 40? (В ящике есть шарики каждого цвета.)

Ответ: 9, 3, 1, 27 или 18, 6, 2, 14.

Решение: По условию количество белых шариков не меньше 11, значит, остальных шариков не более чем 40 – 11 = 29. Обозначим количество зелѐных шариков через x, тогда количество синих шариков — 3x, а количество красных — 9x. Поскольку красных, синих и зелѐных шариков не более 29, получаем $9x + 3x + x \leq 29$ или $13x \leq 29$, то есть $x \leq 2$. Если x = 1, то 3x = 3 и 9x = 9, то есть красных, синих и зелѐных шариков соответственно 9, 3 и 1, тогда белых шариков 40 – (9 + 3 + 1) = 27. Если же x = 2, то 3x = 6 и 9x = 18, то есть красных, синих и зелѐных шариков соответственно 18, 6 и 2, тогда белых шариков 40 – (18 + 6 + 2) = 14.

3. Саша и Ваня родились 19 марта. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?

Ответ: 54 года.

Решение: Если мы перенесём "лишние" свечки с сегодняшнего торта Саши на старый Ванин торт, то получится четыре торта с одинаковым числом свечек. Значит, сегодня Ване исполнилось 216 : 4 = 54 года.

4. Найдите наименьшую несократимую положительную дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{11}{333}$ и $\frac{33}{555}$ получаются целые числа.

Ответ: $\frac{11}{37}$.

Решение: Обозначим искомую дробь через x / y, где x и y — натуральные взаимно простые числа. Разделим её на каждую из данных дробей:

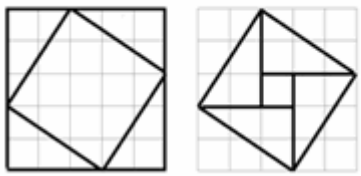
$\frac{x}{y}:\frac{11}{333}=\frac{333x}{11y}$ и $\frac{x}{y}:\frac{33}{555}=\frac{555x}{33y}=\frac{185x}{11y}$.

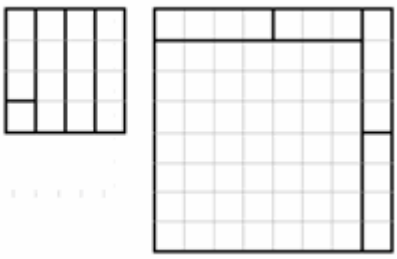
Эти дроби должны быть целыми числами, поэтому 333x делится на 11y, а 185x делится на 11y. Поскольку числа x и y — взаимно простые, отсюда следует, что x делится на 11, а y делит числа 333 и 185, то есть является их общим делителем. Искомая дробь x / y будет наименьшей, если её числитель — наименьший, а знаменатель — наибольший из всех возможных. Следовательно, x = 11, y = НОД(333, 185) = 37

5. У Вики есть четыре фигурки, у Алины есть квадрат, а у Полины есть квадрат другого размера. Объединившись, Алина и Вика могут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок. Может ли оказаться так, что Полина и Вика также смогут сложить квадрат, используя все свои пять фигурок? (Квадраты складываются без просветов и наложений.)

Ответ: Может.

Решение: Приведём два из возможных примеров (см. рисунки). Рис. слева соответствует тому, что у Вики четыре одинаковых треугольника, а рис. справа – тому, что у Вики четыре прямоугольника, один из которых отличается размером от трёх других.





6. Удав полз по прямой тропинке и около пальмы встретил Попугая, бегущего ему навстречу со скоростью в три раза большей. Кивнув друг другу, они продолжили свое движение дальше по тропинке. Оказавшись около хвоста Удава, Попугай спохватился, что забыл передать ему привет от Мартышки! Он повернул назад и, двигаясь с той же скоростью, вернулся к пальме, но на этот момент на уровне пальмы находилась середина Удава. Решив быстрее догнать Удава, Попугай увеличил скорость в два раза. Определите, сколько шагов прошел Попугай от момента первой встречи и до возвращения к голове, если известно, что длина Удава 300 см, а один шаг Попугая равен 0,9 см. (длина шага Попугая не зависит от скорости с которой он идет).

Ответ: 700 шагов

Решение: Так как первоначально скорость Удава в три раза меньше и до возвращения Попугая к пальме Удав прополз половину своей длины, следовательно, Попугая прошел в три раза больше, т.е. 450 см. Затем скорость Попугая стала в 2 раза больше, значит за то же время он прошел в 6 раз больше Удава, т.е. он прошел вторую половину удава – 5 частей и еще одну часть, которую за это время прополз Удав. Если 150 см – 5 частей, то 180 см – 6 частей. Всего Попугай прошел 630 см, что при длине шага 0,9 см соответствует 700 шагам.

7. На лицевой стороне каждой из 6 карточек Аня написала черным или красным фломастером по натуральному числу. При этом каждым цветом Аня написала хотя бы два числа. Затем Боря взял каждую карточку, посмотрел, каким цветом на ней написано число, перемножил все Анины числа того же цвета на других карточках и записал результат на обороте карточки (если другая карточка того же цвета всего одна, то Боря пишет число с этой одной карточки). Мы видим обороты, на которых написаны числа 18, 23, 42, 42, 47, 63. А что написано на лицевых сторонах этих карточек?

Ответ: 7, 47, 3, 3, 23 и 2 соответственно.

Решение: Посмотрим на карточку с надписью «23». Пусть число на лицевой стороне этой карточки написано красным цветом. Тогда среди чисел красного цвета есть число, которое делится на 23. Если чисел красного цвета хотя бы три, на оборотах должны быть хотя бы два числа, которые делятся на23, но это не так. Значит, чисел красного цвета ровно два и одно из них – на лицевой стороне карточки с числом 23. Чёрным цветом тогда записаны четыре числа. Аналогичные рассуждения можно провести с числом 47: цвет числа на лицевой стороне карточки с числом 47 встречается два раза, т.е. оно красное. Но тогда на лицевой стороне карточки с числом 23 написано число 47, а с числом 47 – число 23. Разберёмся теперь с карточками, на которых Аня написала числа чёрным цветом. На их оборотах написаны числа 18, 42, 42 и 63. В их произведение $18\cdot42\cdot42\cdot63=1263$ каждое из чёрных чисел входит по три раза. Отсюда произведение чёрных чисел равно 126. Тогда на лицевой стороне карточки с числом 18 написано число $126/18=7$; с числом 42 – число $126/42=3$; с числом 63 – число $126/63=2$.

XIII Открытая городская олимпиада по математике.
г. Пермь, 13 марта 2022 года. 7 класс.

1. Бурундуки Чип и Дейл должны запасти одинаковое количество орехов на зиму. После того как Чип принес 425 орехов, а Дейл – 368 орехов, Чипу осталось запасти орехов в четыре раза меньше, чем Дейлу. Сколько орехов должен запасти каждый из них?
2. Мы называем числа от 1 до 2022, и каждый раз вместо числа содержащего “5” или делящегося на пять, говорим “Ой”. Сколько раз было сказано “Ой”?
3. Меняла на рынке дает 5 серебряных монет за 11 медных и 3 золотых за 7 серебряных. Купец принес несколько мешков, в каждом по 55 медных монет, за что меняла предложил ему 375 золотых, но купец ответил, что ему нужно, чтобы монет всех видов было поровну. Сколько золотых монет будет у купца после обмена, если меняла - честный?
4. На поле чудес провели три длинные прямые борозды, которые образуют треугольник. Буратино сбегал к одному пересечению, измерил угол, сбегал к другому, измерил, сбегал к третьему. Потом три полученных угла сложил. И говорит, что сумма углов в этом треугольнике 140 градусов. Пьеро знает, что сумма углов не может быть равна 140 градусов, но утверждает, что один-то угол он найти может! Прав ли Пьеро? Если да, найдите этот угол. Если нет, докажите свой ответ.

5. Малыш и Карлсон обожают есть конфеты. Каждый день Малыш съедает на одну конфету больше, чем в предыдущий день, а Карлсон — на две конфеты больше, чем в предыдущий день. В первый день Малыш съел не менее одной конфеты, причём Карлсон в этот день съел на одну конфету больше, чем Малыш. Известно, что оба съели одинаковое число конфет, причём Карлсон съел все свои конфеты за 9 дней. Сколько конфет съел Малыш? Укажите все возможные варианты.

6. Пончик закусывал в придорожном кафе, когда мимо него проехал автобус. Через три плюшки после автобуса мимо Пончика проехал мотоцикл, а ещё через три плюшки – автомобиль. Мимо Сиропчика, который закусывал в другом кафе у той же дороги, они проехали в другом порядке: сначала – автобус, через три плюшки – автомобиль, а ещё через три плюшки – мотоцикл. Известно, что Пончик и Сиропчик всегда едят плюшки с одной и той же постоянной скоростью. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля – 60 км/ч, а скорость мотоцикла – 30 км/ч.

7. На лицевой стороне каждой из 6 карточек Аня написала черным или красным фломастером по натуральному числу. При этом каждым цветом Аня написала хотя бы два числа. Затем Боря взял каждую карточку, посмотрел, каким цветом на ней написано число, перемножил все Анины числа того же цвета на других карточках и записал результат на обороте карточки (если другая карточка того же цвета всего одна, то Боря пишет число с этой одной карточки). Мы видим обороты, на которых написаны числа 18, 23, 42, 42, 47, 63. А что написано на лицевых сторонах этих карточек?

XIII Открытая городская олимпиада по математике.
г. Пермь, 13 марта 2022 года. 7 класс.
Решения.

1. Бурундуки Чип и Дейл должны запасти одинаковое количество орехов на зиму. После того как Чип принес 425 орехов, а Дейл – 368 орехов, Чипу осталось запасти орехов в четыре раза меньше, чем Дейлу. Сколько орехов должен запасти каждый из них?

Ответ: 444 ореха.

Решение: пусть x орехов осталось запасти Дейлу , тогда 425+x=368+4x.

2. Мы называем числа от 1 до 2022, и каждый раз вместо числа содержащего “5” или делящегося на пять, говорим “Ой”. Сколько раз было сказано “Ой”?

Ответ: 708 «ой».

Решение: Среди названных 202 числа заканчивается на 0 (а потому делится на 5) и были заменены на «ой». Еще 202 числа заканчиваются на 5 и были заменены на «ой». Кроме того, есть еще 160 чисел замененных на «ой» по причине цифры 5 в разряде сотен (разряд тысяч 0 или 1, разряд десятков – любая из 10 цифр, разряд единиц – считаем цифры не 0 и не 5, т.е. 8 возможностей). Из оставшихся 2*9*8=144 с 5 в разряде десяток. Итого: 202*2+160+144=708 «ой».

3. Меняла на рынке дает 5 серебряных монет за 11 медных и 3 золотых за 7 серебряных. Купец принес несколько мешков, в каждом по 55 медных монет, за что меняла предложил ему 375 золотых, но купец ответил, что ему нужно, чтобы монет всех видов было поровну. Сколько золотых монет будет у купца после обмена, если меняла - честный?

Ответ: 231 золотых.
Решение: 375 золотых эквивалентно 875 серебряных, что эквивалентно 1925 медных (т.е. 35 мешков). X монет всех достоинств переведем в медь. Это будет X медными + 11/5 X серебряными + 77/15 X золотыми. Итого 25/3 X общая сумма. X=231 монета. А именно: 231 монету оставляем, 1694 меняем на 770 серебряных. 231 оставляем, и 539 серебряных меняем на 231 золотую.

4. На поле чудес провели три длинные прямые борозды, которые образуют треугольник. Буратино сбегал к одному пересечению, измерил угол, сбегал к другому, измерил, сбегал к третьему. Потом три полученных угла сложил. И говорит, что сумма углов в этом треугольнике 140 градусов. Пьеро знает, что сумма углов не может быть равна 140 градусов, но утверждает, что один-то угол он найти может! Прав ли Пьеро? Если да, найдите этот угол. Если нет, докажите свой ответ.

Ответ: да, он прав. Один из углов треугольника 110 градусов.
Решение: Один или несколько раз Буратино измерил не внутренний угол треугольника, а внешний. Если бы Буратино измерил все три внешних, то их сумма оказалась бы 360 градусов. Это не наш вариант. Пусть два угла треугольника A и B Буратино заменил на смежные. Тогда сумма новых углов была бы (180-A)+(180-B)+C=360-(A+B+C)+2C=180+C. И была

бы больше 180 градусов. Значит, путаница произошла только одна. (Т.к. сумма углов уменьшилась, какой-то тупой угол заменили на острый -- но это не очень важное замечание). Итак, Буратино посчитал не сумму углов треугольника (которая, конечно, 180 градусов), а 2 внутренних угла и третий – внешний. Внешний угол при третьей вершине равен сумме двух внутренних. Т.е. сумма двух внутренних 70 градусов. Следовательно, третий внутренний – 110 градусов.

5. Малыш и Карлсон обожают есть конфеты. Каждый день Малыш съедает на одну конфету больше, чем в предыдущий день, а Карлсон — на две конфеты больше, чем в предыдущий день. В первый день Малыш съел не менее одной конфеты, причём Карлсон в этот день съел на одну конфету больше, чем Малыш. Известно, что оба съели одинаковое число конфет, причём Карлсон съел все свои конфеты за 9 дней. Сколько конфет съел Малыш? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 126, 198 или 405.

Решение: Пусть Малыш съел в первый день x конфет, а Карлсон — (x + 1) конфет. Во второй день они съели x + 1 и x + 3 конфет соответственно, и значит, за эти два дня Карлсон съел на 1 + 2 = 3 конфеты больше, чем Малыш. Продолжая рассуждения таким образом, получим, что за 9 дней Карлсон съел на 1 + 2 + … + 9 = 45 конфет больше. Поскольку обжоры съели конфет поровну, в следующие дни Малыш съел ровно 45 конфет, причём за 10-ый день он съедает $x + 9 \geq 10$ конфет, за 11-ый день — не менее 11 конфет, и так далее. Число 45 можно представить в виде суммы слагаемых (из которых первое не меньше 10) только тремя способами: 14 + 15 + 16, 22 + 23 и 45. Другими словами, Малыш съел свои конфеты за 12, 11 или 10 дней. В первом случае, x + 9 = 14, x = 5, и он всего съел 5 + 6 + … + 16 = 126 конфет. Во втором случае, x + 9 = 22, x = 13, и значит, он съел 13 + 14 + … + 23 = 198 конфет. В третьем случае, x + 9 = 45, x = 36, и значит, он съел 36 + 37 + … + 45 = 405 конфет

6. Пончик закусывал в придорожном кафе, когда мимо него проехал автобус. Через три плюшки после автобуса мимо Пончика проехал мотоцикл, а ещё через три плюшки – автомобиль. Мимо Сиропчика, который закусывал в другом кафе у той же дороги, они проехали в другом порядке: сначала – автобус, через три плюшки – автомобиль, а ещё через три плюшки – мотоцикл. Известно, что Пончик и Сиропчик всегда едят плюшки с одной и той же постоянной скоростью. Найдите скорость автобуса, если скорость автомобиля – 60 км/ч, а скорость мотоцикла – 30 км/ч.

   Ответ: 40 км/ч.

   Решение: Пусть в тот момент, когда автобус проезжал мимо Пончика, мотоциклу оставалось x км до первого кафе. Это означает, что за время трёх плюшек автомобиль проезжает x км. Автомобиль движется вдвое быстрее мотоцикла и проехал за это же время 2x км. Столько же он проехал и за следующее время трёх плюшек. Значит, в тот момент, когда мимо Пончика проезжал автобус, автомашина была от него вчетверо дальше, чем мотоцикл. Когда же автобус проезжал мимо Сиропчика, и автомашина, и мотоцикл были позади него на расстоянии 2x км. Стало быть, пока автобус ехал от

Пончика до Сиропчика, автомашина догнала мотоцикл, ликвидировав отставание в $4x - x = 3x$ км. За это же время автомашина сократила отставание от автобуса на $4x - 2x = 2x$ км. Это значит, что скорость, с которой машина догоняет мотоцикл (30 км/ч), составляет 3/2 от скорости, с которой она догоняет автобус. То есть машина догоняет автобус со скоростью 20 км/ч, значит, скорость автобуса $60 - 20 = 40$ км/ч.

7. На лицевой стороне каждой из 6 карточек Аня написала черным или красным фломастером по натуральному числу. При этом каждым цветом Аня написала хотя бы два числа. Затем Боря взял каждую карточку, посмотрел, каким цветом на ней написано число, перемножил все Анины числа того же цвета на других карточках и записал результат на обороте карточки (если другая карточка того же цвета всего одна, то Боря пишет число с этой одной карточки). Мы видим обороты, на которых написаны числа 18, 23, 42, 42, 47, 63. А что написано на лицевых сторонах этих карточек?

<u>Ответ:</u> 7, 47, 3, 3, 23 и 2 соответственно.

<u>Решение:</u> Посмотрим на карточку с надписью «23». Пусть число на лицевой стороне этой карточки написано красным цветом. Тогда среди чисел красного цвета есть число, которое делится на 23. Если чисел красного цвета хотя бы три, на оборотах должны быть хотя бы два числа, которые делятся на23, но это не так. Значит, чисел красного цвета ровно два и одно из них – на лицевой стороне карточки с числом 23. Чёрным цветом тогда записаны четыре числа.Аналогичные рассуждения можно провести с числом 47: цвет числа на лицевой стороне карточки с числом 47 встречается два раза, т.е. оно красное. Но тогда на лицевой стороне карточки с числом 23 написано число 47, а с числом 47 – число 23. Разберёмся теперь с карточками, на которых Аня написала числа чёрным цветом. На их оборотах написаны числа 18, 42, 42 и 63. В их произведение $18 \cdot 42 \cdot 42 \cdot 63 = 1263$ каждое из чёрных чисел входит по три раза. Отсюда произведение чёрных чисел равно 126. Тогда на лицевой стороне карточки с числом 18 написано число $126/18=7$; с числом 42 – число $126/42=3$; с числом 63 – число $126/63=2$.